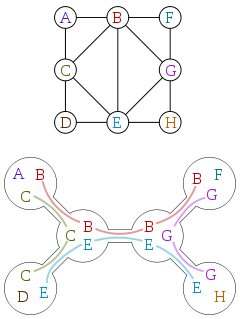
Na [teoria dos grafos](https://translate.googleusercontent.com/translate_c?depth=1&hl=pt-BR&rurl=translate.google.com.br&sl=auto&sp=nmt4&tl=pt-BR&u=https://en.m.wikipedia.org/wiki/Graph_theory&xid=17259,15700022,15700186,15700191,15700256,15700259&usg=ALkJrhj3a3o99yyCoFCgiRkp7c5nacz7tQ) , a **largura** de **árvore** de um gráfico não direcionado é um número associado ao gráfico. Treewidth pode ser definido de várias maneiras equivalentes: do tamanho do maior conjunto de vértices em uma [decomposição](https://translate.googleusercontent.com/translate_c?depth=1&hl=pt-BR&rurl=translate.google.com.br&sl=auto&sp=nmt4&tl=pt-BR&u=https://en.m.wikipedia.org/wiki/Tree_decomposition&xid=17259,15700022,15700186,15700191,15700256,15700259&usg=ALkJrhiTnsgNHYwR4M2O-y1RjZB6rZRWXQ) de [árvore](https://translate.googleusercontent.com/translate_c?depth=1&hl=pt-BR&rurl=translate.google.com.br&sl=auto&sp=nmt4&tl=pt-BR&u=https://en.m.wikipedia.org/wiki/Tree_decomposition&xid=17259,15700022,15700186,15700191,15700256,15700259&usg=ALkJrhiTnsgNHYwR4M2O-y1RjZB6rZRWXQ) do gráfico, do tamanho do maior [clique](https://translate.googleusercontent.com/translate_c?depth=1&hl=pt-BR&rurl=translate.google.com.br&sl=auto&sp=nmt4&tl=pt-BR&u=https://en.m.wikipedia.org/wiki/Clique_(graph_theory)&xid=17259,15700022,15700186,15700191,15700256,15700259&usg=ALkJrhh0pM_Oo6xTltquqzuNTN74po1JRA) em uma [conclusão](https://translate.googleusercontent.com/translate_c?depth=1&hl=pt-BR&rurl=translate.google.com.br&sl=auto&sp=nmt4&tl=pt-BR&u=https://en.m.wikipedia.org/wiki/Chordal_completion&xid=17259,15700022,15700186,15700191,15700256,15700259&usg=ALkJrhgIhrMKtHP7A96NqBXhk-Vm_Nwc9g) de [cordas](https://translate.googleusercontent.com/translate_c?depth=1&hl=pt-BR&rurl=translate.google.com.br&sl=auto&sp=nmt4&tl=pt-BR&u=https://en.m.wikipedia.org/wiki/Chordal_completion&xid=17259,15700022,15700186,15700191,15700256,15700259&usg=ALkJrhgIhrMKtHP7A96NqBXhk-Vm_Nwc9g) do gráfico, da ordem máxima de um [refúgio que](https://translate.googleusercontent.com/translate_c?depth=1&hl=pt-BR&rurl=translate.google.com.br&sl=auto&sp=nmt4&tl=pt-BR&u=https://en.m.wikipedia.org/wiki/Haven_(graph_theory)&xid=17259,15700022,15700186,15700191,15700256,15700259&usg=ALkJrhhx6zAm7ykgBp-l36ndUdnZd3_LQg) descreve uma estratégia para um jogo de [perseguição-evasão](https://translate.googleusercontent.com/translate_c?depth=1&hl=pt-BR&rurl=translate.google.com.br&sl=auto&sp=nmt4&tl=pt-BR&u=https://en.m.wikipedia.org/wiki/Pursuit-evasion&xid=17259,15700022,15700186,15700191,15700256,15700259&usg=ALkJrhgANUjdQgBsoB7-m37RpAP8u0luKA) no gráfico, ou a partir da ordem máxima de uma [broca](https://translate.googleusercontent.com/translate_c?depth=1&hl=pt-BR&rurl=translate.google.com.br&sl=auto&sp=nmt4&tl=pt-BR&u=https://en.m.wikipedia.org/wiki/Bramble_(graph_theory)&xid=17259,15700022,15700186,15700191,15700256,15700259&usg=ALkJrhgeMBrSEQJGHYuPSm3ioLRRKQ1yFA) , uma coleção de subgrafos conectados que se tocam.

Treewidth é comumente usado como um parâmetro na análise de [complexidade parametrizada](https://translate.googleusercontent.com/translate_c?depth=1&hl=pt-BR&rurl=translate.google.com.br&sl=auto&sp=nmt4&tl=pt-BR&u=https://en.m.wikipedia.org/wiki/Parameterized_complexity&xid=17259,15700022,15700186,15700191,15700256,15700259&usg=ALkJrhjO8vE3gPsSgcZstIFhLcn4-B3BpA) de [algoritmos](https://translate.googleusercontent.com/translate_c?depth=1&hl=pt-BR&rurl=translate.google.com.br&sl=auto&sp=nmt4&tl=pt-BR&u=https://en.m.wikipedia.org/wiki/Algorithm&xid=17259,15700022,15700186,15700191,15700256,15700259&usg=ALkJrhi1PTSOOC0TZnglBsWQFOqdvQnFLQ) gráficos. Os gráficos com largura de árvore no máximo *k* também são chamados de [árvores *k* parciais](https://translate.googleusercontent.com/translate_c?depth=1&hl=pt-BR&rurl=translate.google.com.br&sl=auto&sp=nmt4&tl=pt-BR&u=https://en.m.wikipedia.org/wiki/Partial_k-tree&xid=17259,15700022,15700186,15700191,15700256,15700259&usg=ALkJrhi8TZdZj830s-cg5he2RH8gyaIZtw) ; muitas outras famílias de gráficos bem estudadas também têm largura de árvore limitada.

O conceito de largura de árvore foi originalmente introduzido por Umberto Bertelé e Francesco Brioschi ( [1972](https://translate.googleusercontent.com/translate_c?depth=1&hl=pt-BR&rurl=translate.google.com.br&sl=auto&sp=nmt4&tl=pt-BR&u=https://en.m.wikipedia.org/wiki/Treewidth&xid=17259,15700022,15700186,15700191,15700256,15700259&usg=ALkJrhiQiH8nUO9_yJkoBE95as7WOVSsxA#CITEREFBertel%C3%A9Brioschi1972) ) sob o nome de *dimensão* . Mais tarde, foi redescoberto por [Rudolf Halin](https://translate.googleusercontent.com/translate_c?depth=1&hl=pt-BR&rurl=translate.google.com.br&sl=auto&sp=nmt4&tl=pt-BR&u=https://en.m.wikipedia.org/wiki/Rudolf_Halin&xid=17259,15700022,15700186,15700191,15700256,15700259&usg=ALkJrhjnuN9A31sUCPn2rAFF1DhpvIX2kA) ( [1976](https://translate.googleusercontent.com/translate_c?depth=1&hl=pt-BR&rurl=translate.google.com.br&sl=auto&sp=nmt4&tl=pt-BR&u=https://en.m.wikipedia.org/wiki/Treewidth&xid=17259,15700022,15700186,15700191,15700256,15700259&usg=ALkJrhiQiH8nUO9_yJkoBE95as7WOVSsxA#CITEREFHalin1976) ), baseado em propriedades que compartilha com um parâmetro gráfico diferente, o [número de Hadwiger](https://translate.googleusercontent.com/translate_c?depth=1&hl=pt-BR&rurl=translate.google.com.br&sl=auto&sp=nmt4&tl=pt-BR&u=https://en.m.wikipedia.org/wiki/Hadwiger_number&xid=17259,15700022,15700186,15700191,15700256,15700259&usg=ALkJrhiRslkWOwgeEVXQaQk9eqiMnpcLPQ) . Mais tarde foi novamente redescoberto por [Neil Robertson](https://translate.googleusercontent.com/translate_c?depth=1&hl=pt-BR&rurl=translate.google.com.br&sl=auto&sp=nmt4&tl=pt-BR&u=https://en.m.wikipedia.org/wiki/Neil_Robertson_(mathematician)&xid=17259,15700022,15700186,15700191,15700256,15700259&usg=ALkJrhh2akYU2_sc0a2BIR6n2ecbkXSGhg) e [Paul Seymour](https://translate.googleusercontent.com/translate_c?depth=1&hl=pt-BR&rurl=translate.google.com.br&sl=auto&sp=nmt4&tl=pt-BR&u=https://en.m.wikipedia.org/wiki/Paul_Seymour_(mathematician)&xid=17259,15700022,15700186,15700191,15700256,15700259&usg=ALkJrhiuh-7b1PwWHgYCBr3E1EtMjqFGpQ) ( [1984](https://translate.googleusercontent.com/translate_c?depth=1&hl=pt-BR&rurl=translate.google.com.br&sl=auto&sp=nmt4&tl=pt-BR&u=https://en.m.wikipedia.org/wiki/Treewidth&xid=17259,15700022,15700186,15700191,15700256,15700259&usg=ALkJrhiQiH8nUO9_yJkoBE95as7WOVSsxA#CITEREFRobertsonSeymour1984) ) e desde então tem sido estudado por muitos outros autores.[[1]](https://translate.googleusercontent.com/translate_c?depth=1&hl=pt-BR&rurl=translate.google.com.br&sl=auto&sp=nmt4&tl=pt-BR&u=https://en.m.wikipedia.org/wiki/Treewidth&xid=17259,15700022,15700186,15700191,15700256,15700259&usg=ALkJrhiQiH8nUO9_yJkoBE95as7WOVSsxA#cite_note-1)

## **Definição**

****

Um gráfico com oito vértices e uma decomposição de árvore em uma árvore com seis nós. Cada borda do gráfico conecta dois vértices que são listados juntos em algum nó da árvore, e cada vértice do gráfico é listado nos nós de uma subárvore contígua da árvore. Cada nó da árvore lista no máximo três vértices, portanto, a largura dessa decomposição é dois.

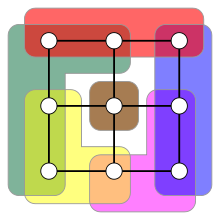
Uma [decomposição em árvore](https://translate.googleusercontent.com/translate_c?depth=1&hl=pt-BR&rurl=translate.google.com.br&sl=auto&sp=nmt4&tl=pt-BR&u=https://en.m.wikipedia.org/wiki/Tree_decomposition&xid=17259,15700022,15700186,15700191,15700256,15700259&usg=ALkJrhiTnsgNHYwR4M2O-y1RjZB6rZRWXQ) de um grafo *G* = ( *V* , *E* ) é uma árvore, *T* , com nós *X* 1 , ..., *X* *n* , onde cada *X* *i* é um subconjunto de *V* , satisfazendo as seguintes propriedades [[2]](https://translate.googleusercontent.com/translate_c?depth=1&hl=pt-BR&rurl=translate.google.com.br&sl=auto&sp=nmt4&tl=pt-BR&u=https://en.m.wikipedia.org/wiki/Treewidth&xid=17259,15700022,15700186,15700191,15700256,15700259&usg=ALkJrhiQiH8nUO9_yJkoBE95as7WOVSsxA#cite_note-2) termo *nó* é usado para se referir a um vértice de *T* para evitar confusão com vértices de *G* ):

1. A união de todos os conjuntos *X* *i* é igual a *V.* Ou seja, cada vértice do gráfico está contido em pelo menos um nó da árvore.
2. Se *Xi* e *Xj* contiverem um vértice *v* , então todos os nós *Xk* de *T* no caminho (exclusivo) entre *X* *i* e *X* *j* conterão *v* também. Equivalentemente, os nós da árvore que contêm o vértice *v* formam uma subárvore conectada de *T.*
3. Para cada borda ( *v* , *w* ) no gráfico, existe um subconjunto *X* *i* que contém tanto *v* como *w* . Ou seja, os vértices são adjacentes no gráfico apenas quando as subárvores correspondentes tiverem um nó em comum.

A *largura* de uma decomposição de árvore é o tamanho de seu maior conjunto *X* *i* menos um. A **largura de árvore** tw ( *G* ) de um grafo *G* é a largura mínima entre todas as possíveis decomposições de árvores de *G.* Nessa definição, o tamanho do maior conjunto é diminuído por um para tornar a largura de árvore de uma árvore igual a um.

Equivalentemente, a largura de árvore de *G* é um menor que o tamanho do maior [clique](https://translate.googleusercontent.com/translate_c?depth=1&hl=pt-BR&rurl=translate.google.com.br&sl=auto&sp=nmt4&tl=pt-BR&u=https://en.m.wikipedia.org/wiki/Clique_(graph_theory)&xid=17259,15700022,15700186,15700191,15700256,15700259&usg=ALkJrhh0pM_Oo6xTltquqzuNTN74po1JRA) no [gráfico de cordas que](https://translate.googleusercontent.com/translate_c?depth=1&hl=pt-BR&rurl=translate.google.com.br&sl=auto&sp=nmt4&tl=pt-BR&u=https://en.m.wikipedia.org/wiki/Chordal_graph&xid=17259,15700022,15700186,15700191,15700256,15700259&usg=ALkJrhi8Sxyz5L2jqNvyrAEp47m8B_bEbQ) contém *G* com o menor [número de clique](https://translate.googleusercontent.com/translate_c?depth=1&hl=pt-BR&rurl=translate.google.com.br&sl=auto&sp=nmt4&tl=pt-BR&u=https://en.m.wikipedia.org/wiki/Maximum_clique&xid=17259,15700022,15700186,15700191,15700256,15700259&usg=ALkJrhgeHO7ed443EaO_YZ3epErdWaVxbg) . Um grafo cordal com este tamanho de clique pode ser obtido adicionando a *G* uma aresta entre cada dois vértices que pertencem a pelo menos um dos conjuntos *X i* .

Treewidth também pode ser caracterizado em termos de [paraísos](https://translate.googleusercontent.com/translate_c?depth=1&hl=pt-BR&rurl=translate.google.com.br&sl=auto&sp=nmt4&tl=pt-BR&u=https://en.m.wikipedia.org/wiki/Haven_(graph_theory)&xid=17259,15700022,15700186,15700191,15700256,15700259&usg=ALkJrhhx6zAm7ykgBp-l36ndUdnZd3_LQg) , funções que descrevem uma estratégia de evasão para um determinado jogo de [evasão de perseguição](https://translate.googleusercontent.com/translate_c?depth=1&hl=pt-BR&rurl=translate.google.com.br&sl=auto&sp=nmt4&tl=pt-BR&u=https://en.m.wikipedia.org/wiki/Pursuit-evasion&xid=17259,15700022,15700186,15700191,15700256,15700259&usg=ALkJrhgANUjdQgBsoB7-m37RpAP8u0luKA) definido em um gráfico. Um grafo *G* tem largura de árvore *k* se, e somente se, ele tem um refúgio de ordem *k* + 1, mas não de ordem superior, onde um refúgio de ordem *k* + 1 é uma função *β* que mapeia cada conjunto *X* de no máximo *k* vértices em *G* um dos componentes conectados de *G* \ *X* e que obedece à propriedade de [monotonicidade](https://translate.googleusercontent.com/translate_c?depth=1&hl=pt-BR&rurl=translate.google.com.br&sl=auto&sp=nmt4&tl=pt-BR&u=https://en.m.wikipedia.org/wiki/Monotonicity&xid=17259,15700022,15700186,15700191,15700256,15700259&usg=ALkJrhhnrGufneZYeNBebvslNAC5dD8OkQ) que *β* ( *Y* ) ⊆ *β* ( *X* ) sempre que *X* ⊆ *Y.*

**

Uma [amoreira](https://translate.googleusercontent.com/translate_c?depth=1&hl=pt-BR&rurl=translate.google.com.br&sl=auto&sp=nmt4&tl=pt-BR&u=https://en.m.wikipedia.org/wiki/Bramble_(graph_theory)&xid=17259,15700022,15700186,15700191,15700256,15700259&usg=ALkJrhgeMBrSEQJGHYuPSm3ioLRRKQ1yFA) de ordem quatro em um gráfico de grade 3 × 3, cuja existência mostra que o gráfico tem largura de árvore de pelo menos 3

Uma caracterização similar também pode ser feita usando-se [brambles](https://translate.googleusercontent.com/translate_c?depth=1&hl=pt-BR&rurl=translate.google.com.br&sl=auto&sp=nmt4&tl=pt-BR&u=https://en.m.wikipedia.org/wiki/Bramble_(graph_theory)&xid=17259,15700022,15700186,15700191,15700256,15700259&usg=ALkJrhgeMBrSEQJGHYuPSm3ioLRRKQ1yFA) , famílias de subgrafos conectados que se tocam (o que significa que eles compartilham um vértice ou estão conectados por uma borda). [[3]](https://translate.googleusercontent.com/translate_c?depth=1&hl=pt-BR&rurl=translate.google.com.br&sl=auto&sp=nmt4&tl=pt-BR&u=https://en.m.wikipedia.org/wiki/Treewidth&xid=17259,15700022,15700186,15700191,15700256,15700259&usg=ALkJrhiQiH8nUO9_yJkoBE95as7WOVSsxA#cite_note-3) A ordem de uma broca é o menor [conjunto de batidas](https://translate.googleusercontent.com/translate_c?depth=1&hl=pt-BR&rurl=translate.google.com.br&sl=auto&sp=nmt4&tl=pt-BR&u=https://en.m.wikipedia.org/wiki/Hitting_set&xid=17259,15700022,15700186,15700191,15700256,15700259&usg=ALkJrhjhWS7qzEncIhYYMNANUOez6CuU6g) para a família de subgráficos, e a largura de árvore de um gráfico é um a menos que a ordem máxima de uma broca.